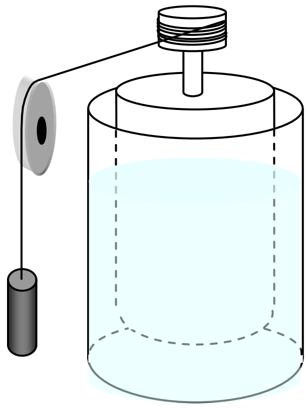
Viskoznost

Viskoznost možemo promatrati kao unutrašnje trenje između čestica fluida (tekućina i plinova). I upravo to svojstvo fluida razlog je zbog kojeg je potrebna sila ako želimo ostvariti klizanje jednog sloja fluida preko drugog, ili klizanje neke krute plohe preko druge plohe kada se između njih nalazi sloj fluida.

Da bi stvorili predodžbu o svojstvu viskoznosti razmotrit ćemo jedan od više različitih uređaja kojima se ona može mjeriti. (Slika 1.)

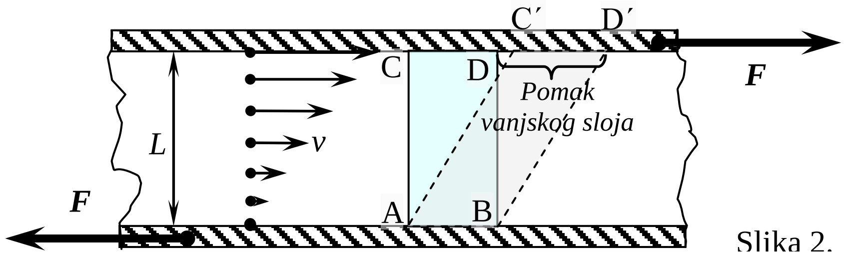


Slika 1.

U prostor između dva koaksijalna valjka nalije se tekućina kojoj želimo izmjeriti viskoznost. Unutrašnji valjak može se okretati pod djelovanjem zakretnog momenta koji stvara uteg (potezanjem niti prebačene preko nepomične koloture i omotane na kalem). Brzina okretanja ubrzo nakon puštanja utega postaje stalna. Očito je da će ta brzina biti manja ako se u uređaju nalazi neka tekućina kao što je ulje ili med, nego ako je unutra voda.

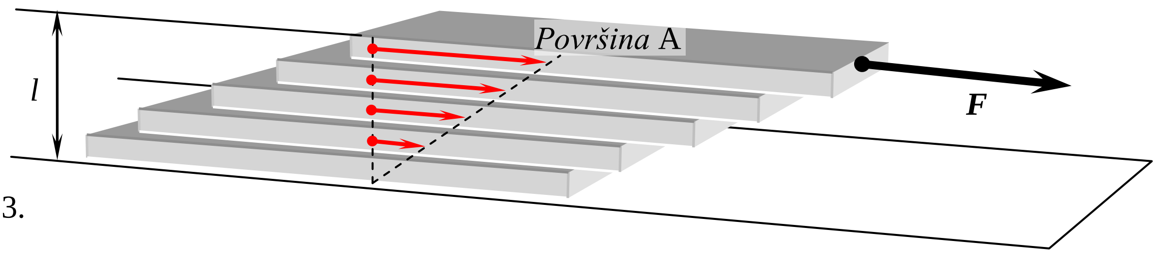
Pogledajmo izbliza odsječak tekućine između stijenki valjaka:

Zamislimo da su valjci skoro jednake veličine, tako da je sloj tekućine između njih vrlo tanak. Jedan kratki lûk ovog sloja bit će onda približno ravna dužina. (Slika 2.) Ustanovljeno je pokusima da se tekućina u sloju koji dodiruje pokretnu stijenku giba istom brzinom kao i ta stijenka, dok tekućina uz nepokretnu stijenku miruje. Brzina slojeva u sredini ravnomjerno raste idući od jedne stijenke prema drugoj, kao što pokazuju strelice.



Slika 2.

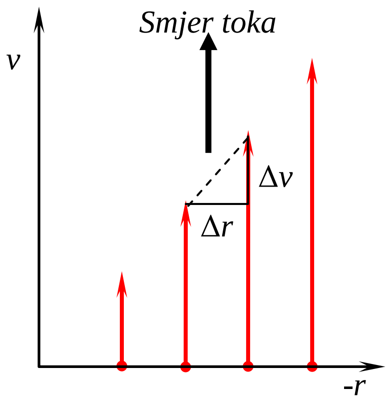
Ovakav se tok naziva se ***laminarnim***. To znači da slojevi tekućine klize jedan preko drugog slično listovima knjige postavljene na stol, na čije gornje korice djeluje vodoravna sila. (Slika 3.) Pretpostavka o laminarnom toku značajna je zato što prelaskom u turbulentno gibanje priroda toka postaje vrlo komplicirana.



Slika 3.

Zbog djelovanja tangencijalne sile ***F*** dio tekućine koji promatramo (pravokutnik ABCD na slici 2.) postat će deformiran (romboid ABC´D´). Da bi se ostvarilo gibanje valjka potrebno je da na njegovu stijenku, pa prema tome posredno i na sloj tekućine uz nju, stalno djeluje sila koja nastoji za sobom povući i ostale slojeve tekućine i stijenku drugog valjka. Zato na drugi valjak mora djelovati jednaka sila suprotnog smjera kako bi on ostao u mirovanju. Ove su sile na slici 2. označene slovom ***F***. Pomak vanjskog sloja podijeljen s debljinom svih slojeva DD´/*l* naziva se ***tengencijalna deformacija***. Nju stvara sila ***F*** po jedinici površine A. Omjer te sile i površine zovemo ***tangencijalno naprezanje F***/A koje djeluje na tekućinu.

U našem smo razmatranju pretpostavili poseban (jednostavan) slučaj, da se brzina pojedinog sloja ravnomjerno povećava s udaljavanjem od mirujuće stijenke. Općenito ne mora biti tako. ***Prostorna*** brzina promjene brzine, u smjeru okomitom na tok, zove se ***gradijent brzine*** u tom smjeru. (Za razliku od vremenske brzine promjene brzine koju nazivamo akceleracija). Vrijednost gradijenta brzine u proizvoljnoj točki je dv/dr, pri čemu je dv mala razlika brzine između dvije točke udaljene za dr, mjereno okomito na smjer toka (Slika 4.)



Slika 4.

U ovom posebnom slučaju gradijent brzine jednak je v/l, no očito je da je općenito gradijent tim veći što je veće tangencijalno naprezanje koje ga uzrokuje i što je manje unutrašnje trenje između slojeva tekućine. To trenje označit ćemo slovom η, a budući da je različito za različite fluide naziva se ***koeficijent viskoznosti***.

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\eta}\frac{F_\eta}{A}$$

Gradijent brzine dv/dr razmjeran je tangencijalnom naprezanju (dakle uzroku), a obrnuto je razmjeran koeficijentu viskoznosti η

Iz gornje se relacije možemo izlučiti koeficijent viskoznosti η:

$$\eta = \frac{F_\eta / A}{\Delta v / \Delta r}$$

Koeficijent viskoznosti η veći je kod onih fluida kod kojih za određeni gradijent brzine dv/dr treba veće tangencijalno naprezanje F_η / A

Vidi se da će mali koeficijent viskoznosti imati one tekućine koje lako teku, kao što su voda ili alkohol, jer će uz razmjerno malo tangencijalno naprezanje postići velik gradijent brzine. Kod tekućina kao što su glicerin ili med potrebno je veće tangencijalno naprezanje za isti gradijent brzine, pa kažemo da te tekućine imaju veću viskoznost.

Dimenziona analiza pokazuje da je jedinica za viskoznost u SI sustavu: [N s m^{-2}]. Deset puta manja jedinica: [0,1 N s m^{-2}] naziva se ***1 poaz*** (u čast francuskog znanstvenika Poiseuillea). Male viskoznosti izražavaju se u *centipoazima* [1cp = 10^{-2} poaza] ili *mikropoazima* [1μp =10^{-3}p].

Konačno možemo izraziti viskoznu silu:

$$F_\eta = \eta A \frac{dv}{dr}$$

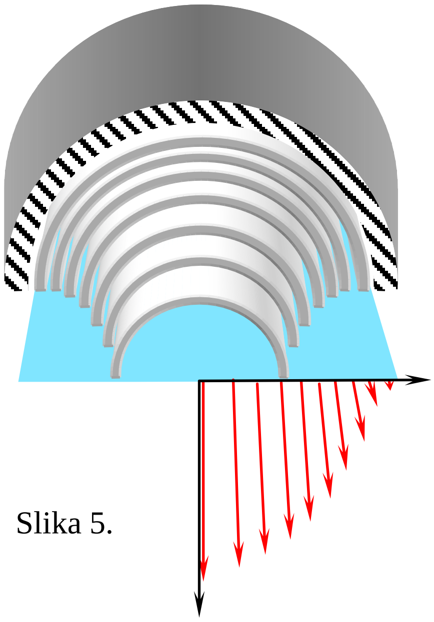
Gornja relacija slična je izrazu za silu u drugom Newtonovom aksiomu:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

S tog stanovišta možemo konstantu ηA smatrati veličinom koja je analogna masi. Kao što je masa m svojstvo tijela da se odupire promjeni brzine (u vremenu) tako je izraz ηA svojstvo fluida da se odupire promjeni brzine u prostoru. Pri tome na gradijent brzine dv/dr gledamo kao na analogiju sa ubrzanjem dv/dt.

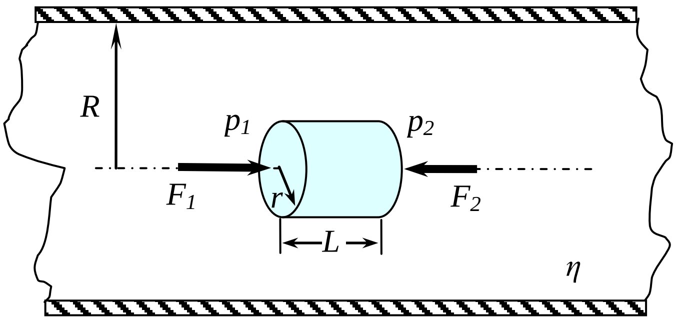
Poiseuilleov zakon

Poiseuillea ja zanimalo kakva je raspodjela brzina pojedinih slojeva u fluidu koji protječe kroz okruglu cijev. Cijevi su naime sredstvo kojim se najčešće služimo za prijenos fluida pa je logično zanimanje za ponašanje fluida u njima. Očito je da brzina fluida koji teče kroz cijev neće biti ista u svim točkama poprečnog presjeka. Vanjski sloj fluida lijepi se za stijenke cijevi i njegova je brzina jednaka nuli, on miruje. Stijenka cijevi djeluje silom unazad na ovaj sloj koji onda dalje djeluje silom unazad na sljedeći sloj, itd. Pod uvjetom da brzina nije prevelika, tok će biti laminaran, sa brzinom koja je najveća u sredini cijevi i koja se smanjuje k nuli idući prema stijenki. Takav tok možemo zamisliti kao gibanje niza koaksijalnih teleskopskih cijevi, koje kližu relativno jedna prema drugoj, pri čemu se središnja cijev giba najbrže, a vanjska ostaje u miru. (Slika 5.)



Slika 5.

Promatrajmo dio cijevi unutrašnjeg polumjera *R* i duljine *L*, kroz koju laminarno teče fluid viskoznosti η. Uzet ćemo u sredini cijevi mali valjak fluida, polumjera *r* koji se giba jednolikom brzinom jer je potisna sila koja ga gura izjednačena sa silom otpora pa je rezultantna sila nula. Potisnu silu uzrokuje razlika tlakova na krajevima valjka, a otpor stvara viskozna sila na njegovom plaštu. (Slika 6.)



Slika 6.

Što, dakle, gura element fluida kroz cijev ? Gura ga potisna sila uzrokovana razlikom tlakova:

$$F_p = F_1 - F_2 = (p_1 - p_2) r^2 \pi$$

Ta je sila jednakog iznosa, a suprotnog smjera od viskozne sile:

$$F_p = -F_\eta$$

Viskozna sila djeluje na plašt valjka površine A = 2*rπL* što možemo uvrstiti u jednakost:

$$(p_1 - p_2) r^2 \pi = -\eta 2 r \pi L \frac{dv}{dr}$$

Izlučivanjem *dv* iz ove jednakosti dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu koju treba integrirati:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r\,dr \quad \Big/ \int \qquad \left(\int r^n dr = \frac{r^{n+1}}{n+1} \right)$$

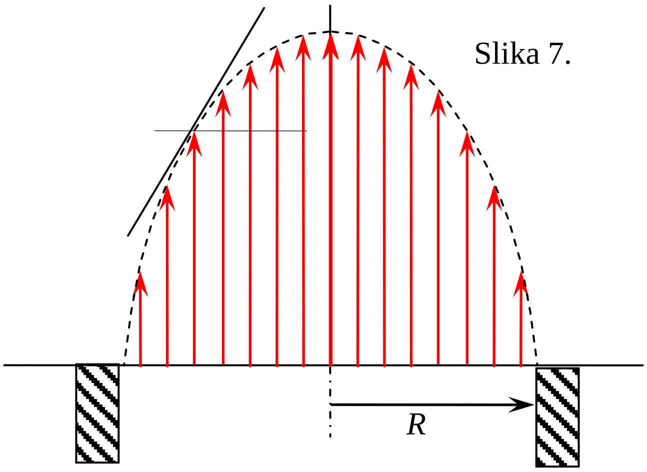
$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta L} r^2 + C$$

Konstantu *C* odredimo iz uvjeta da za *r* = *R* mora biti

$$v = 0\,; \quad \Rightarrow \quad C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} R^2$$

$$\boxed{v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)}$$

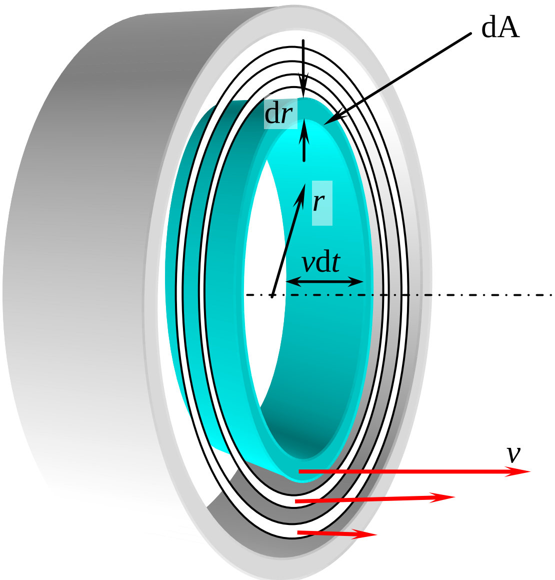
Dobivena relacija predstavlja jednadžbu parabole, to jest tok ima paraboličnu raspodjelu brzina. Duljine strelica razmjerne su brzinama u odgovarajućim položajima. Gradijent brzine, *dv*/*dr*, za bilo koji polumjer, jednak je nagibu tangente na ovu krivulju prema ravnini presjeka cijevi. (Slika 7.)



Slika 7.

Ovakva raspodjela brzina upućuje na zaključak da protok nije jednak po čitavom presjeku cijevi. Najveća količina fluida proteče sredinom cijevi dok su doprinosi ostalih slojeva manji. Ta činjenica sili nas da kod izračunavanja ukupnog protoka zbrojimo različite doprinose svih slojeva.

Protok ***Q***, ćemo definirati kao volumen fluida koji prođe kroz proizvoljni presjek cijevi u jedinici vremena, odnosno $Q = V / t$. U svrhu određivanja ukupnog protoka prvo ćemo promatrati protok fluida, ne kroz čitav presjek cijevi, nego kroz vrlo malu prstenastu površinu dA



Diferencijalni element protoka dQ je prema tome diferencijalni volumen dV koji prođe brzinom v u vremenskom razdoblju dt:

$$dQ = \frac{v\,dt\,dA}{dt} = v\,dA$$

Površina kružnog vijenca je d$A = 2r\pi dr$

Sad u izraz za dQ uvrstimo ranije dobiveni izraz za brzinu i ovaj izraz za površinu kružnog vijenca:

$$dQ = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)2r\pi dr$$

Volumen koji proteče kroz cijeli poprečni presjek dobit ćemo integriranjem po svim elementima između $r = 0$ i $r = R$

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi}{2\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2) r\,dr = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

Ovaj se izraz naziva ***Poiseuilleov zakon.*** Protok je obrnuto razmjeran viskoznosti, kao što se moglo i očekivati, a razmjeran je četvrtoj potenciji polumjera cijevi. Tako da se protok smanjuje 16 puta ako se polumjer smanji 2 puta. Kvocijent $(p_1\text{-}p_2)/L$ je *gradijent tlaka* duž cijevi. Tok je razmjeran gradijentu tlaka i vidimo da kod viskoznog fluida postoji pad tlaka čak i duž ravnih cijevi stalnog presjeka.

Po analogiji sa tokom naboja kod električne struje, gdje je jakost struje razmjerna naponu, a obrnuto razmjerna otporu možemo uočiti da izraz $\frac{8\eta L}{\pi R^4}$ ima smisao otpora pa se stoga i naziva *hidrodinamički otpor.*

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{\frac{8\eta L}{\pi R^4}} \qquad I = \frac{U}{R}$$

Hidrodinamički otpor razmjeran je viskoznosti i duljini cijevi, a obrnuto je razmjeran polumjeru cijevi na četvrtu potenciju.